Die Geschichte der Trigonometrie

Die Geschichte der Trigonometrie geht bis in die frühste aufgezeichnet Mathematik in Ägypten und Babylonien zurück. Die Babylonier führten die Messung von Winkeln in Grad, Minuten und Sekunden ein. Die Griechen des Altertums gaben dann der Trigonometrie ein beachtliches Ausmaß.
Angeregt wurden sie durch praktische Konstruktionsprobleme sowie geographische und astronomische Beobachtungen. Diese Größen eines Bogens wurde in der griechischen Mathematik wurden über die Länge zugehöriger Sehnen bestimmt.

Im 2.Jahrhundert v.Chr. stellte der Astronom Hipparchos von Nicäa, 190 bis 120 v.Chr., eine trigonometrische Tafel zur Berechnung von Dreiecken zusammen. Diese Tafeln wurden auch Sehnentafel genannt.
Beginnend bei 7 1/2° und in Schritten von 7 1/2° bis zu 180° fortschreitend , gaben die Tabellen für jeden Winkel die Länge der ihm gegenüberliegenden Sekante eines Kreises mit einem festen Radius r an. Diese Tafel ist praktisch einer Sinustafel äquivalent und war die erste Sehnentafel zur Berechnung von astronomischen Problemen.

Es ist nicht sicher, welchen Radius r Hipparchos zugrunde legte, aber 300 Jahre später benutzten der Astronom Ptolemäus, 100 bis 160 n. Chr.,
den Radius r=60, da die hellenistischen Griechen die babylonische Basis 60
(sexagesimales Zahlensystem) übernommen hatten.

In seinem großen astronomischen Handbuch Almagest lieferte Ptolemäus eine Tafel über „Kreissehnen".
Er erläuterte seine Methode wie er diese Tabelle ausgestellt hat:
Mit zunehmendem Mittelpunktswinkel µ wird die Sehne s immer größer.
Die Sehnenlänge wurde Chorde von µ genannt.
Ptolemaios gab die Chorde in ½°-Schritten von 0° bis 180° in Abhängigkeit vom Kreisradius r an:
(hier in moderner Schreibweise)

Außerdem gab er im Laufe seines Buches viele Beispiele, wie man die Tabelle benutzte, um unbekannte Komponenten von Dreiecken aus bekannten zu erhalten.
Ptolemäus stellte das als Satz des Menelaos bekannte Theorem zur Bestimmung von Kugeldreiecken auf.
Mehrere Jahrhunderte lang war seine Trigonometrie für jeden Astronom die Haupteinführung in dieses Gebiet.

Zeitgleich mit Ptolemäus hatten indische Astronomen ein trigonometrische System entwickelt, das auf der Sinusfunktion und nicht auf der Sekantenfunktion der Griechen beruhte. Diese Sinusfunktion war im Gegensatz zu der heutigen kein Längenverhältnis , sondern einfach die Länge der Seite, die dem Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck mit einer festen Hypotenuse gegenüberlag. Die Inder benutzen verschiedene Werte für die Hypotenuse.

Im späten 8.Jahrhundert übernahmen arabische Astronomen sowohl die griechische als auch die indischen Erkenntnisse.

Bis zum Ende des 10. Jahrhunderts hatten sie die Sinusfunktion und die grundlegende trigonometrischen Funktionen vervollständigt. Außerdem stellten sie verschiedene

grundlegende trigonometrische Sätze sowohl für ebene als auch für Kugeldreiecke auf und brachten die mathematischen Beweise dafür.
Verschiedene Mathematiker regten an r=1 statt r=60 zu verwenden.
Genau dadurch erhält man die heute benutzten Werte der trigonometrischen Funktionen.
Die arabischen Gelehrten führten auch das Polardreieck für Kugeldreiecke ein. Diese Entdeckungen wurden sowohl für astronomische Zwecke als auch als Hilfsmittel astronomischer Zeitmessungen und zur Positionsbestimmung auf der Erde angewandt. Die arabischen Wissenschaftlicher stellten sehr genaue Tabellen auf.
Ihre Sinus- und Tangententabellen waren für eine Schrittlänge von 1/60 Grad konstruiert und hatten z.B. eine bessere Genauigkeit als 1 zu 700 Millionen.

Im 13.Jahrhundert verfasste der persische Universalgelehrte und Politiker Nasir ad-Din at-Tusi das Buch des transversalen Körpers, in dem zum ersten Mal die ebne und die sphärische Trigonometrie als eigenständige mathematische Wissenschaften behandelt wurden.
Mit den Übersetzungen arabischer Handbücher der Astronomie ab dem 12. Jahrhundert wurde auch die arabische Trigonometrie in Westeuropa bekannt.

Die erste größere westliche Arbeit in diesem Gebiete verfasste der deutsche Astronom und Mathematiker Johann Müller aus Königsberg in Franken, der sich nach seiner Heimatstadt Regiomontanus nannte und von 1436 –1476 lebte.
Er benutzte als einzige Winkelfunktion den Sinus und hat die ebene Trigonometrie vollständig, die sphärische Trigonometrie zu einem großen Teil behandelt. Von ihm stammt auch eine ausführliche Sinuswertetabelle.

Später führte Georg Joachim (Rheticus) ein weiterer deutscher Astronom, den modernen Begriff trigonometrische Funktionen als Längenverhältnisse an Stelle von Längen bestimmter Streckern ein.
Der französische Mathematiker Francis Viète stellte die Formeln für die Funktionen des mehrfachen Winkels sin nq und cos nq auf, in denen diese Funktionen durch Potenzen von sin q und cos q ausgedrückt werden.

Der schottische Mathematiker John Napier, der im frühen 17.Jahrhundert die Logarithmen erfand, trug viel zur Vereinfachung trigonometrischer Berechnungen bei. Er entwickelte einige Gedächtnisstützen zur Berechnung von Kugeldreiecken sowie einige Beziehungen zur Berechnung rechtwinkliger Kugeldreiecke.

Fast genau ein halbes Jahrhundert nach Napiers Veröffentlichung seiner Logarithmen entwickelte Isaac Newton die Differential- und Integralrechnung. Eine der Grundlagen der Arbeit war Newtons Darstellung vieler Funktionen als unendliche Reihen in Potenzen von x.

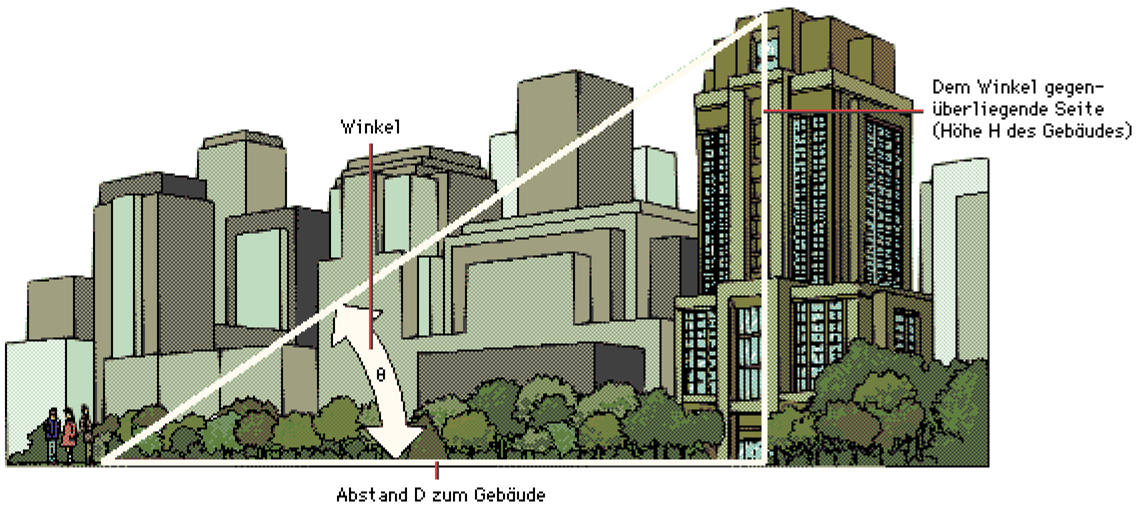
So fand Newton die Reihendarstellung von sin x und eine ähnliche Reihe für cos x und tan x .
Mit der Einführung der Infinitesimalrechnung wurden die trigonometrische Funktionen in die Analysis übernommen, wo sie noch heute eine wichtige Rolle sowohl in der reinen als auch in der angewandten Mathematik spielen.
Schließlich definierte im 18.Jahrhundert der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler,1707-1783, die trigonometrischen Funktionen mittels komplexer Zahlen.

Später wurde der Dreiecksbegriff durch Carl Friedrich Gauß, 1777-1855, erweitert, der die im Eulerschen Dreieck enthaltenen Beschränkungen über die Seite und Winkel fallen ließ.
Gauß und Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846, haben auch der praktischen Trigonometrie durch die Aufstellung genau ausgebildeter Rechnungsweisen ihre moderne Form gegeben.

Schließlich ist der Begriff des sphärischen Dreiecks durch Eduard Study, 1862-1931, im Sinne der Gruppentheorie gefasst worden.

Anwendungsbeispiele zur Trigonometrie im Alltag

Die frühsten Anwendungen der Trigonometrie waren in den Gebieten der Navigation, der Vermessungskunde und der Astronomie.
Das Hauptproblem bestand im Allgemeinen darin, nicht direkt messbare Entfernungen zu berechnen.
Ein nicht direkt messbare Entfernung ist zum Beispiel die Höhe eines Gebäudes.

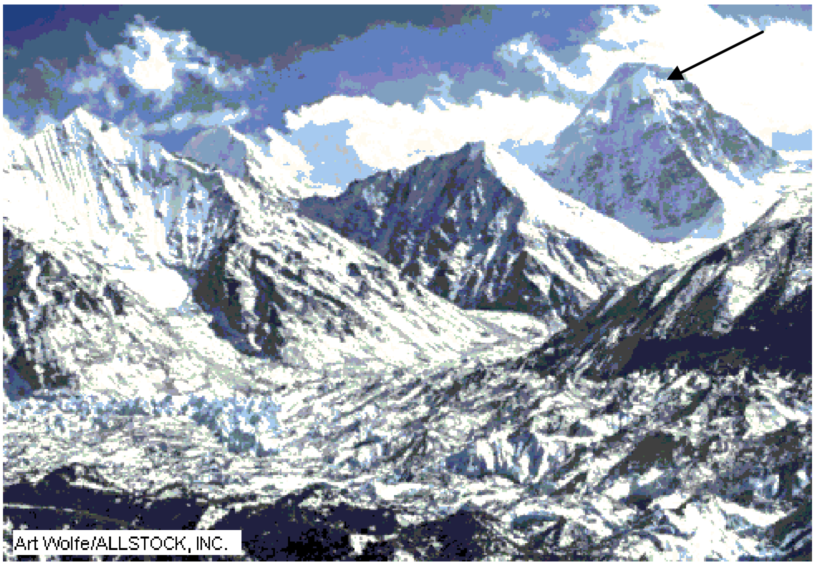


Um die Höhe dieses Gebäudes zu bestimmen, genügt es, die Entfernung vom Beobachtungspunkt zum Fußpunkt des Gebäudes zu kennen und den Winkel zwischen ihm und der Spitze des Bauwerkes zu messen: Die mit dem Tangens des Beobachtungswinkels multiplizierte Distanz ergibt die Gebäudehöhe.

$$\tan(\text{Winkel}) = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}} = \frac{\textit{Höhe}}{\textit{Entfernung}}$$

Für ein weiteres Anwendungsbeispiel begeben wir uns in das Jahr 1852 in das Büro des Generallandvermessers von Indien.
In dem ehrgeizigen trigonometrischen Projekt, den gesamten Himalaja zu kartographieren, dienten trigonometrische Messungen zur Berechnung der Höhe der entfernten Gipfel.
Es war sehr schwer an die nötigen Informationen heranzukommen. Zum einen gab es Probleme mit dem Maßstab und zum anderen waren die Gipfel des Himalajas mehrere hundert Kilometer und mehr von den Vermessern entfernt, so dass man bei diesen Distanzen atmosphärisch bedingte Verzerrungen und die Erdkrümmung miteinbeziehen musste.
Außerdem konnten die Vermessungstrupps aufgrund politischer Querelen Nepal und Tibet unmöglich betreten, in deren Grenzregion die Hauptkette des Himalaja liegt.
Nur wegen ihrer unglaublichen Höhe waren die Gipfel überhaupt von den indischen Vorgebirgen aus zu sehen.
Trotz all dieser Schwierigkeiten ging die Arbeit voran. Verschiedene Gipfel wurden vermessen, bis man endlich den höchsten Berg der Erde entdeckte.

Tatsächlich sah er gar nicht aus, wie der höchste Berg am Horizont, das kam daher, dass er viel weiter weg war, als alle anderen.
Seine Entfernung wurde aus trigonometrischen Daten errechnet. Dieser Gipfel erhob sich über 8.5 Kilometer über dem Meeresspiegel und kratzte schon die Stratosphäre an.
Die Briten benannten den Gipfel nach guter Tradition der Kolonialmächte nach einem, der ihren: nach Sir George Everest, dem früheren Leiter des Vermessungsunternehmens.



Der Gipfel im hinteren Teil der Abbildung ist der Mount Everest.

Worauf ich mit diesem Beispiel hinaus will, ist die Anwendung der Trigonometrie bei der Höhenbestimmung im Jahre 1852. Sie erfolgte mehr als ein Jahrhundert, bevor Tenzing Norgay und Edmund Hillary als erste Menschen Ende Mai 1953 auf dem Gipfel des Mt. Everest standen.

Mit der gleichen Methode, mit der Gebäude , Bäume und der Mt. Everest vermessen wurden, lieferte nämlich auch die ungleich größere Entfernungen zu Mond, Sonne und den Planeten.

Es gibt auch trigonometrische Geräte, die im Alltag eingesetzt wurden.
Ein einfaches trigonometrisches Gerät ist der Jakobsstab. Er dient zur Abstandsmessung zweier Punkte, etwa auch zwei Gestirne.

Ursprünglich wurde es von dem in der Provence lebenden jüdischen Gelehrten Levi ben Gerson, 1288-1344, entwickelt, war aber in dessen Ausführung sehr unhandlich und nach dessen schwer verständlichen Anleitung zur tatsächlichen Messung des Abstandes von Gestirnen ungeeignet.

Es bestand aus einem ein Meter langen Hauptstab, an dem sechs rechteckige Platten befestigt waren, von denen zwei verschiebbar waren. An einem Ende des Hauptstabes befand sich eine Platte mit Rundungen als Visiereinrichtung für die Augen. Während der Beobachtung musste es aufgelegt oder durch einen Stab gestützt werden.

Regiomontanus vereinfachte es erheblich zu dem von ihm sogenannten Gradstock, eine Bezeichnung die von deutschen Seefahrern übernommen wurde, während es bei Engländern crossstaff, bei Franzosen arbalete und bei Portugiesen balestilha genannt wurde.
Regiomontanus Gerät arbeitete nach der Sehnenmeßmethode, der Regula Hipparchi, die

bereits von dem griechischen Astronom und Mathematiker Hipparchos zur Winkelmessung benutzt wurde.
Auf dem Gradstock, auf dem die Messskala eingraviert war, saß ein einziger beweglicher Querstab, die regulella.
An einem Ende des Gradstocks im Augenpunkt A und an den beiden Enden C und D des Querstabs waren kleine Nägel angebracht

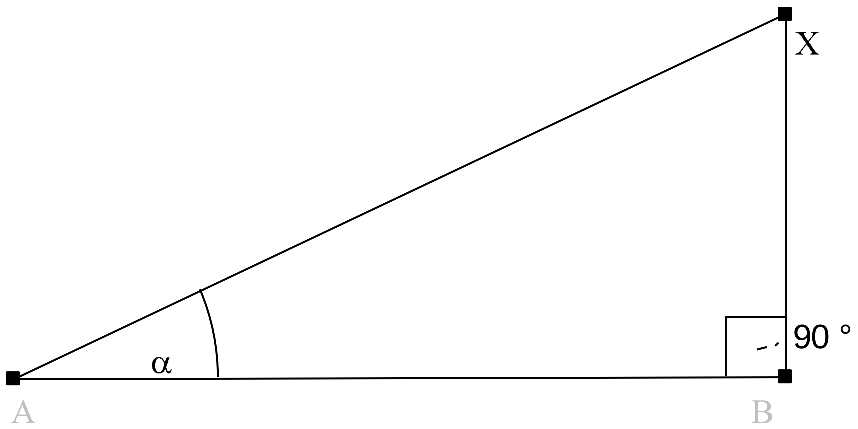
Obwohl der Jakobsstab bereits 1433 von Paolo Toscanelli, 1397-1482, erfolgreich zur Ortsbestimmung eines Kometen verwendet worden war, konnte es sich in der Seefahrt, trotz der erheblichen Vereinfachung im Gebrauch, erst ab dem 16. Jahrhundert durchsetzten.
Er wurde dann im 18.Jahrhundert durch den 1730 erfundenen Spiegeloktanten abgelöst!

Übersicht

Die Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Um die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck einzuführen werden die Seiten im rechtwinkligen Dreieck folgendermaßen definiert:

Bezüglich des Winkels a ist die Seite BC die Gegenkathete, AB die Ankathete und CA die Hypothenuse. Der rechte Winkel soll sich immer bei B befinden.



Man definiert dann die Winkelfunktionen folgendermaßen:

sin a : = |BC| : |CA|= Gegenkathete : Hypotenuse

cos a: = |AB| : |CA| = Ankathete : Hypotenuse

tan a : = |BC| : |AB| = Gegenkathete : Hypotenuse

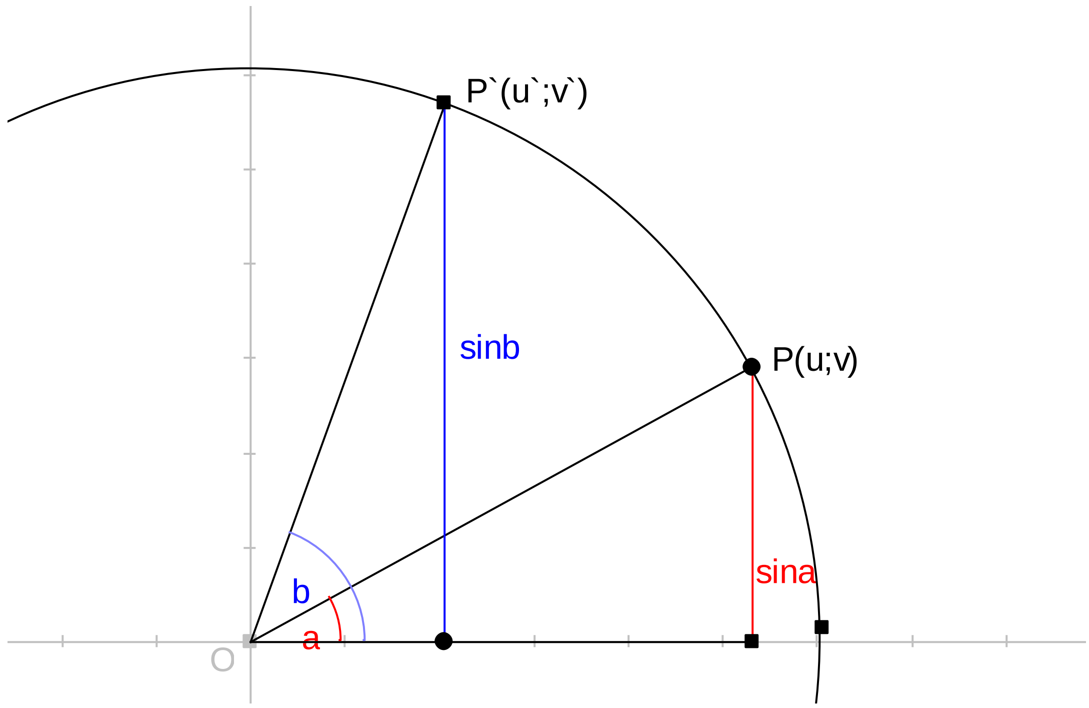
Die Winkelfunktionen am Einheitskreis:

Im rechtwinkligen Dreieck sind die Winkelfunktionen nur für Winkel zwischen 0° und 90° definiert. Mithilfe des Einheitskreises (r=1) kann man diese Definition auf 360° ausweiten.

Die Sinusfunktion

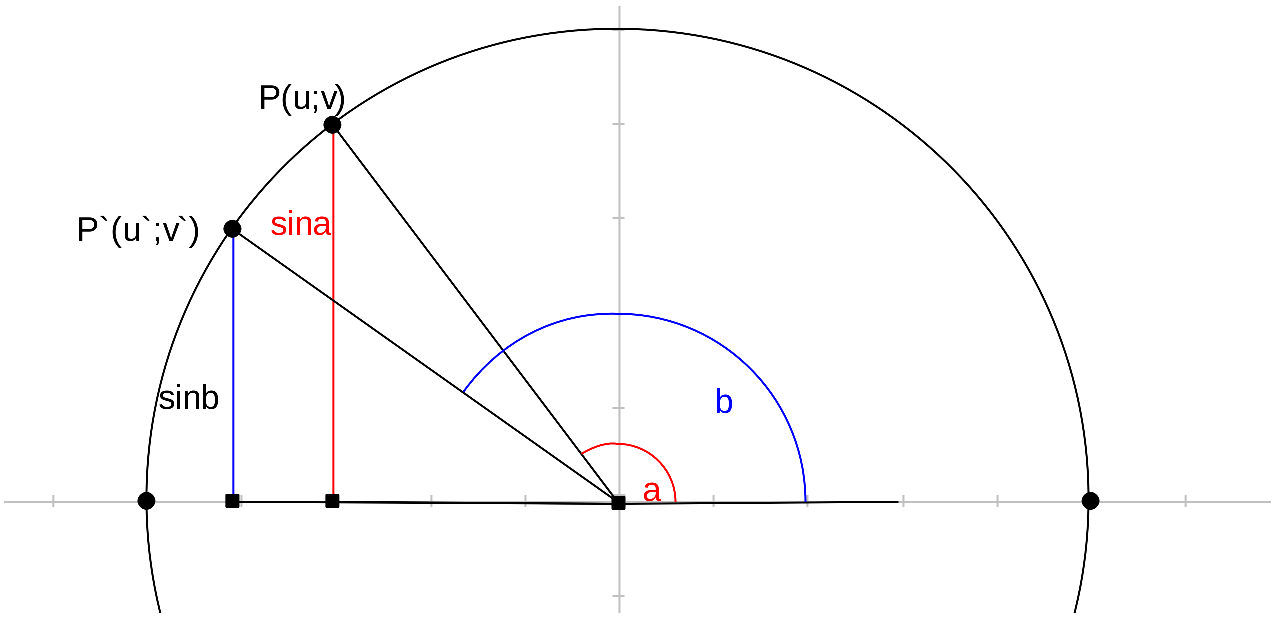
es gilt: sin a: = v = zweit Koordinate des Punktes P

für Winkel bis 90° sieht das so aus :



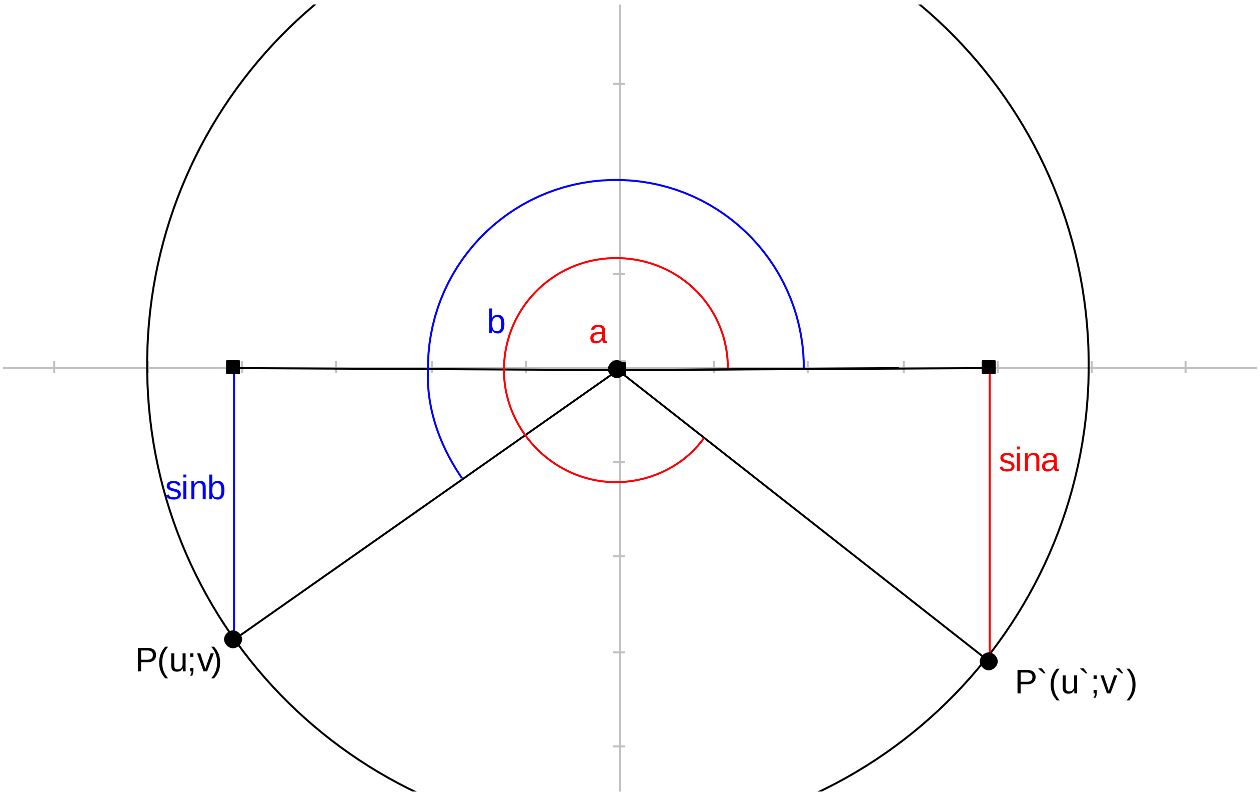
(Einheitskreis Sinus)

Für Winkel bis 180°



(Eineitskreis2Sinus)

Für Winkel bis 360°:

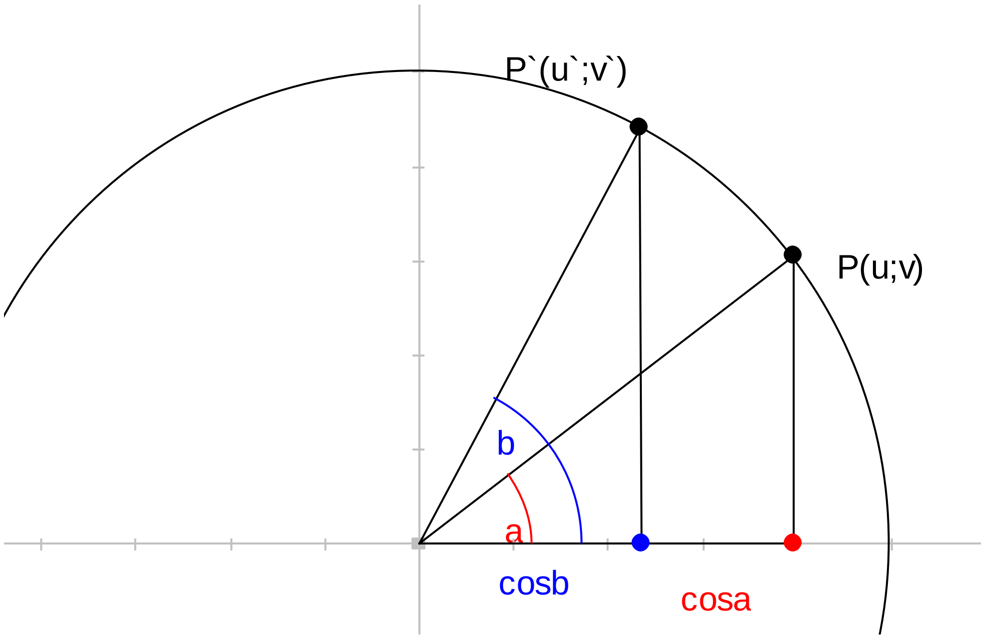


(Einheitskreis3Sinus)

Die Cosinusfunktion

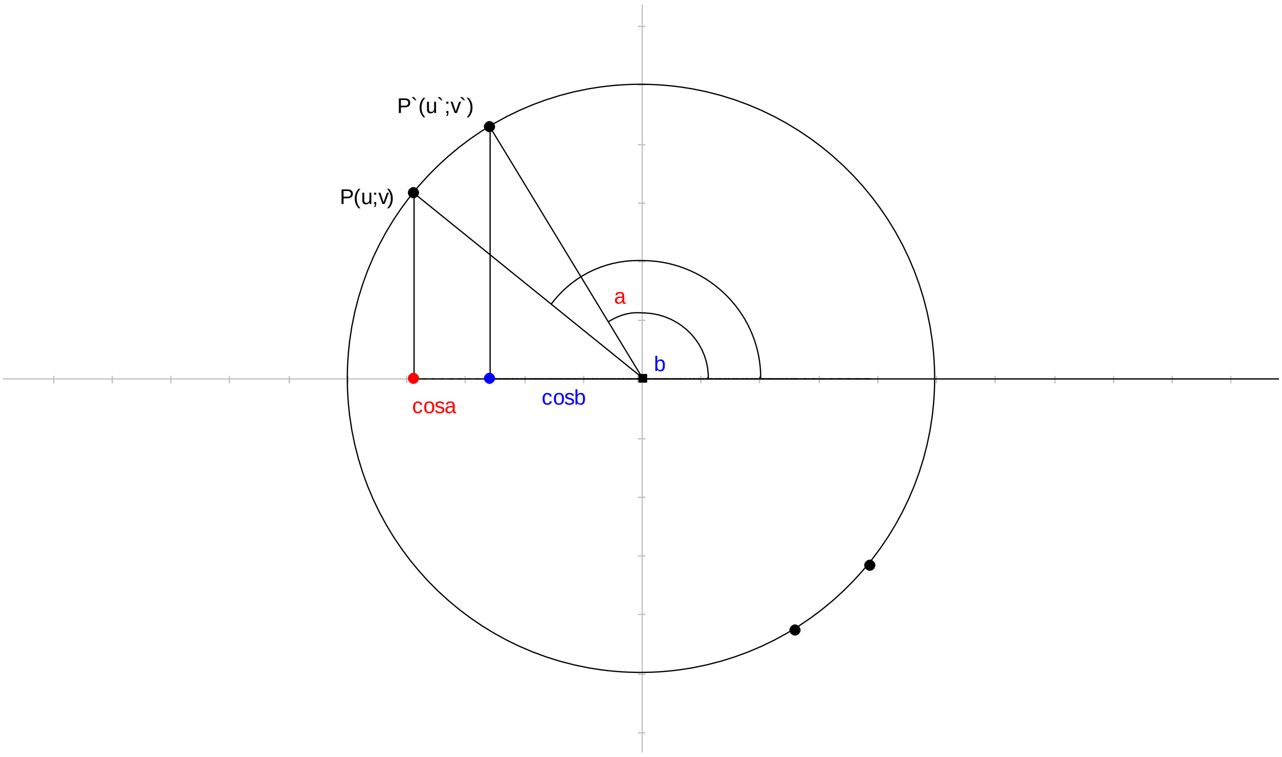
es gilt: cos a: = u = erste Koordinate des Punktes P

für Winkel bis 90° sieht das zum Beispiel so aus:



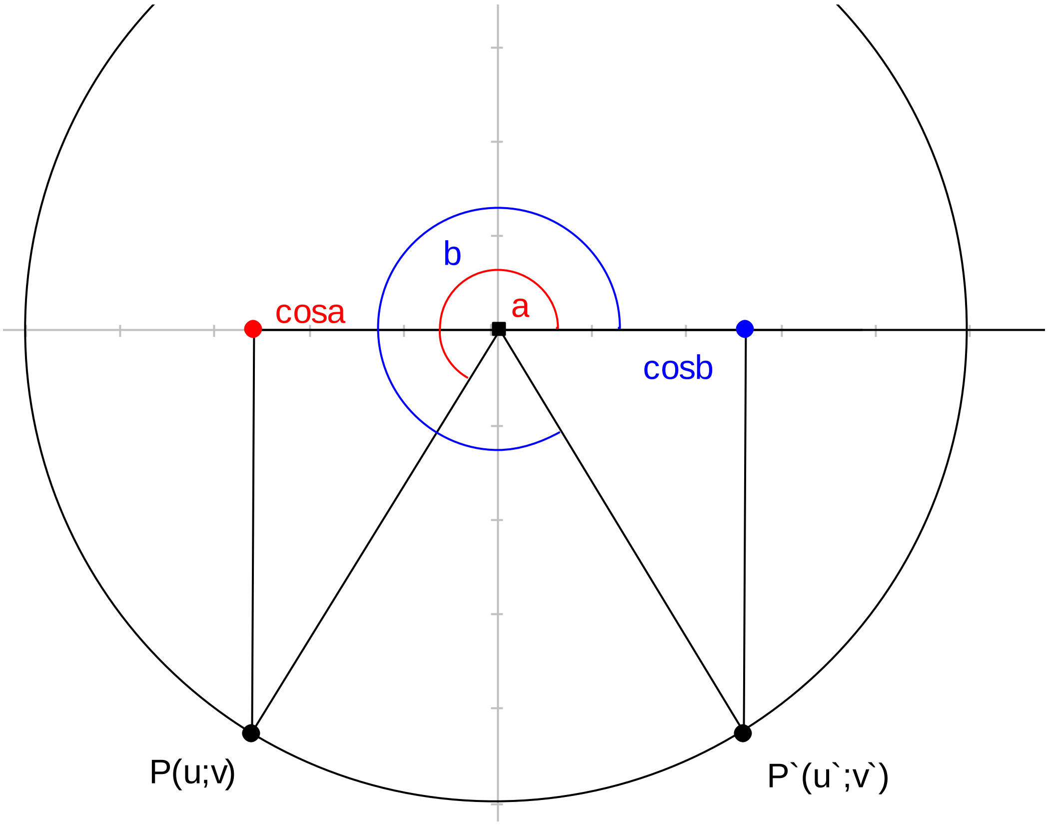
(einheitskreiscosinus)

Die Cosinusfunktion für Winkel bis 180°



(einheitskreiscosinus1)

für Winkel bis 360°:

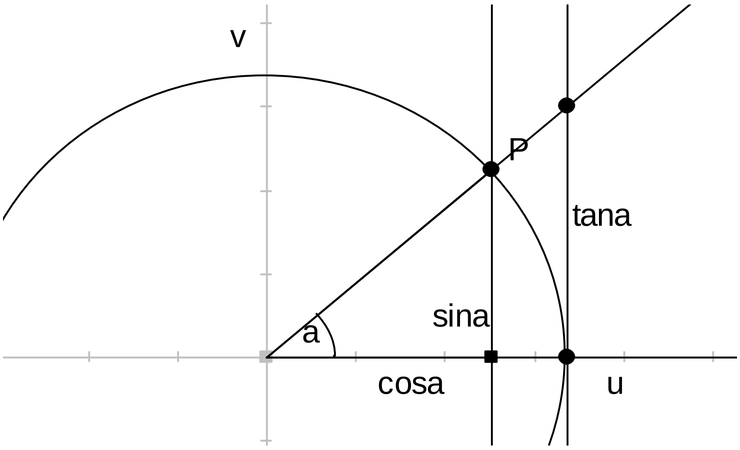


Die Tangensfunktion

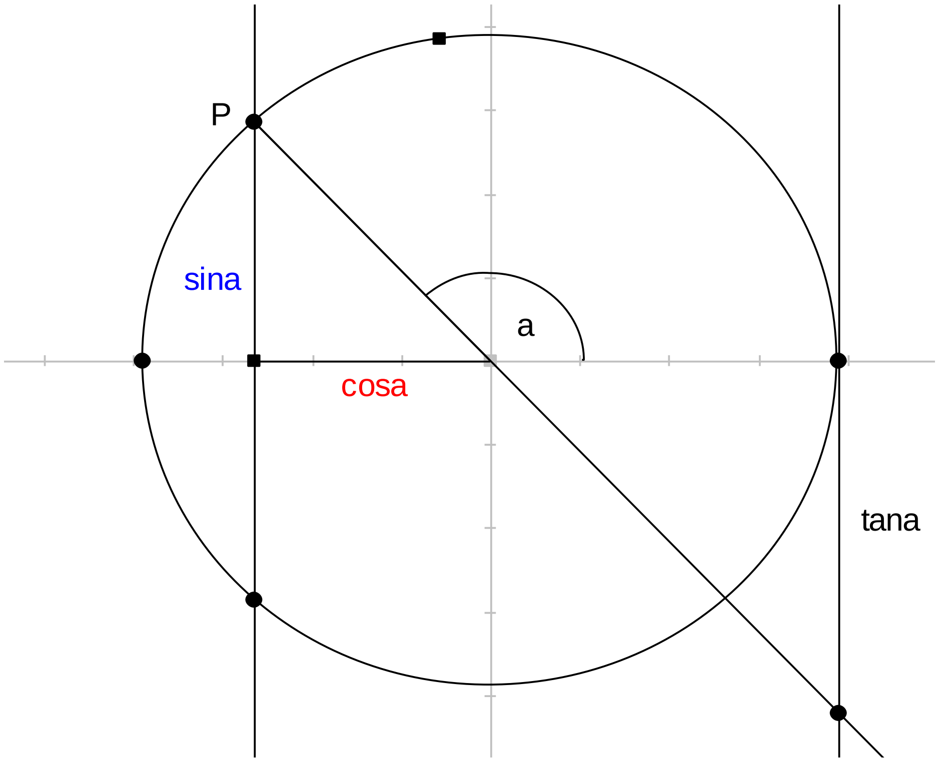
Es gilt:
tan a: = sin a : cos a = v : u

Im Einheitskreis sieht das folgendermaßen aus:

Bis 90°sieht das folgendermaßen aus:



bis 360° sieht das folgendermaßen aus:



Die Winkelfunktionen haben in den vier Quadranten unterschiedliche Vorzeichen, die in der Tabelle aufgelistet sind:

2.Quadrant sin positiv cos negativ tan negativ	1.Quadrant sin positiv cos positiv tan positiv
3.Quadrant sin negativ cos negativ tan positiv	4.Quadrant sin negativ, cos positiv tan negativ