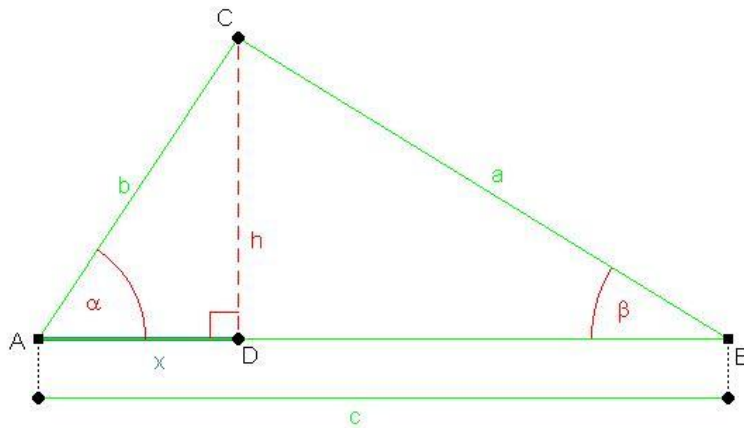


## Der Kosinussatz

Dreiecke lassen sich mit drei Angaben zu ihrer Figur, vollständig zeichnen. Da aber die zeichnerische Lösung eines Dreiecks nicht so genau und zudem recht aufwendig ist, muss es auch einen rechnerischen Weg geben, die unbekannte Größen eines Dreiecks in Erfahrung zu bringen. Während der Sinussatz immer dann anwendbar ist, wenn unter den bekannten Stücken eine Seite und ihr Gegenwinkel ist (sww und ssw), wird der Kosinussatz immer angewendet, wenn drei Seiten oder zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind (sss und sws).



Ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck wird gezeichnet, bestehend aus den Punkten A, B und C und den Seiten a, b und c. Den der Seite a gegenüberliegenden Winkel nennen wir  $\alpha$  den der Seite b gegenüberliegenden Winkel nennen wir  $\beta$ .

Hier werden wir das eben gezeichnete Dreieck zunächst über die Höhe h von Punkt C in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, um mit dem Satz des Pythagoras arbeiten zu können. Wir nennen nun den Fußpunkt der Höhe D und die Strecke AD nennen wir x.

So erhalten wir:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

und

$$b^2 = h^2 + x^2$$

Um beide Formeln miteinander vereinen zu können, stellen wir die zweite Formel nach  $h^2$  um, und erhalten:

$$h^2 = b^2 - x^2$$

Wir ersetzen das  $h^2$  der ersten Formel durch die zweite Formel und haben somit den Ausdruck:

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2$$

Um den Ausdruck weiter zu vereinfachen multiplizieren wir die Klammer nach der binomischen Formel aus:

$$(c - x)^2 = c^2 - 2cx + x^2$$

und erhalten dann, da sich  $x^2$  aufhebt,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

Um nun x besser auszudrücken wenden wir unser Wissen über die Winkelfunktionen an.

Da wir bereits  $h$  aus unserer Gleichung entfernt haben und uns nur noch den Winkel  $\alpha$ , die Hypotenuse  $b$  und die Ankathete  $x$  zur Verfügung haben, können wir in unserem Dreieck ADC nur noch den Kosinus von  $\alpha$  anwenden. Entsprechend lautet dann hier die Gleichung:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{b}$$

Umgestellt nach  $x$  ergibt sich dann:

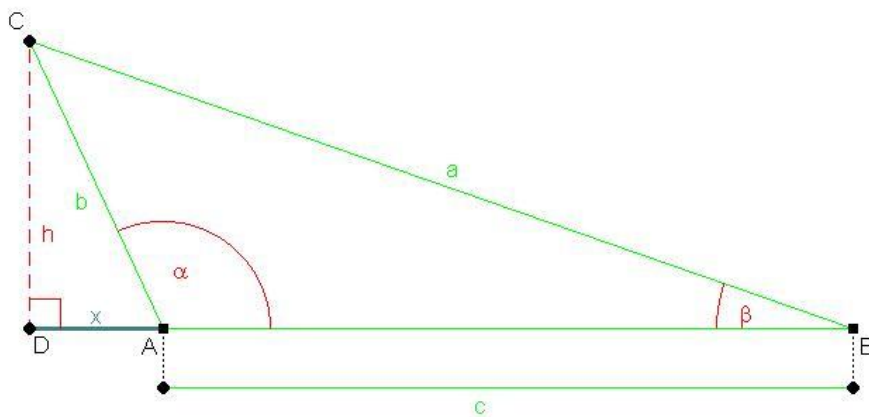
$$x = b \cdot \cos(\alpha)$$

Setzen wir dies in unsere Gleichung ein, sehen wir, dass

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

ist und dies eine Aussage des Kosinussatzes ist.

Selbstverständlich trifft diese Aussage auch auf das stumpfwinklige Dreieck zu:



In diesem Fall liegt die Höhe  $h$  von Punkt  $C$  außerhalb des Dreiecks  $ABC$ . Prinzipiell gehen wir genauso vor, wie im obigen Dreieck. Wir bilden mittels der Höhe  $h$  die zwei rechtwinkligen Dreiecke  $CDA$  und  $CDB$  und stellen die entsprechenden Formeln gemäß Pythagoras auf:

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

$$b^2 = h^2 + x^2$$

stellen die zweite Formel nach  $h^2$  um:

$$h^2 = b^2 - x^2$$

und setzen dies ein:

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c + x)^2$$

lösen die Klammer auf, und erhalten:

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

Da sich  $x^2$  aufhebt ergibt sich:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

Nun müssen wir noch  $x$  vereinfachen. Auch hier wenden wir wieder den Kosinus an, da nur Hypotenuse, Ankathete und Winkel zur Verfügung stehen.

$$x = b \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

Da wir vom Kosinus wissen, dass ein Kosinus von  $180^\circ - \alpha$ , einem negativen Kosinus des Winkels  $\alpha$  entspricht, formen wir entsprechend um:

$$x = b \cdot (-\cos(\alpha))$$

Und erhalten so:

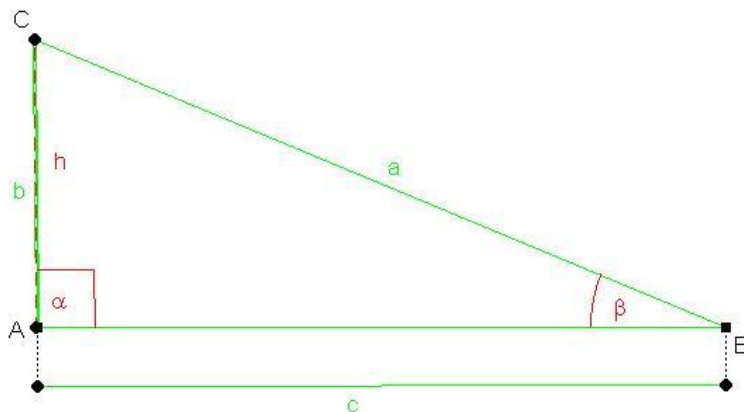
$$x = -b \cdot \cos(\alpha)$$

Eingesetzt in unsere Gleichung ergibt dies:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

Folglich stimmt diese Formel für beliebige spitz- und stumpfwinklige Dreiecke

Nehmen wir nun an, der Kosinussatz würde auf die Form eines rechtwinkligen Dreiecks angewandt:

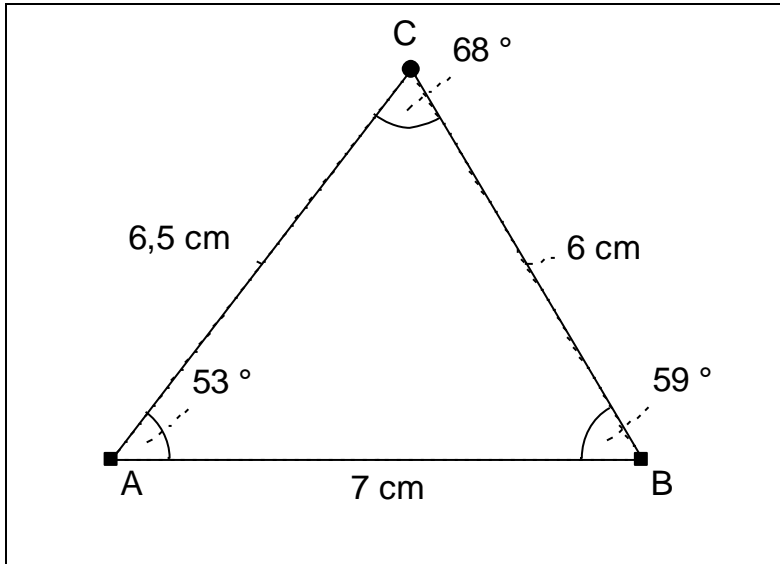


Damit würde  $b = h$  werden,  $x$  würde verschwinden und  $\alpha$  wäre rechtwinklig. Da ein  $\alpha$  von  $90^\circ = 0$  ist, hieß das für unsere Gleichung, dass der hintere Teil unserer Gleichung ( $-2ab \cdot \cos(\alpha)$ ) auch gleich Null wäre und es würde der Satz des Pythagoras übrigbleiben. Daher nennt man auch den Kosinussatz den „verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz“

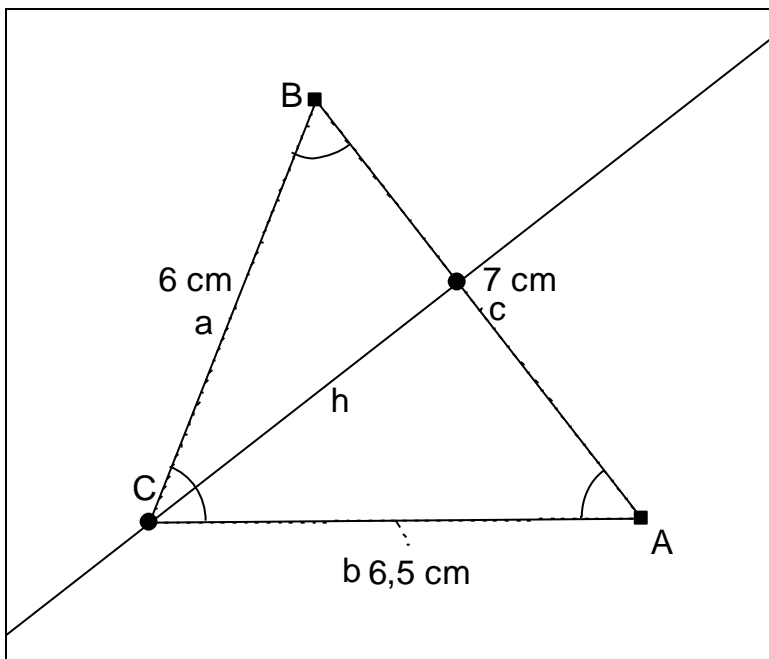
Der Kosinussatz
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

## Der Sinussatz

Kosinus, Sinus, und der Tangens „gelten“ lediglich für Dreiecke mit einem rechtem Winkel. Wie kann man nun in einem Dreieck, ohne rechtem Winkel die Geraden oder Winkel berechnen? Dazu gibt es den Sinus- und Kosinussatz.



Hier sieht man nun, dass die einzelnen Seiten nicht senkrecht aufeinander stehen. In dem Fall gehen wir einfach so vor, dass wir zunächst das Dreieck in zwei weitere Dreiecke aufteilen. Am sinnvollsten, wenn wir zwei Dreiecke mit einem rechten Winkel machen, also eine Höhe einzeichnen:



Jetzt können wir zunächst den Sinus anwenden: dann ist  $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$  und  $\sin(\beta) = \frac{h}{a}$ .

Hier sehen wir, dass in beiden Gleichungen eine gleiche Variable steckt. Wenn wir nun diese isolieren und dann die Gleichungen gleichsetzen, erhalten wir folgendes:

$$\sin(\alpha) \cdot b = h = a \cdot \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Wenn wir nun das Lot auf eine andere Seite fallen (Höhe) und gleichermaßen vorgehen ergibt sich folgende allgemeine Aussage für Dreiecke (der Sinussatz):

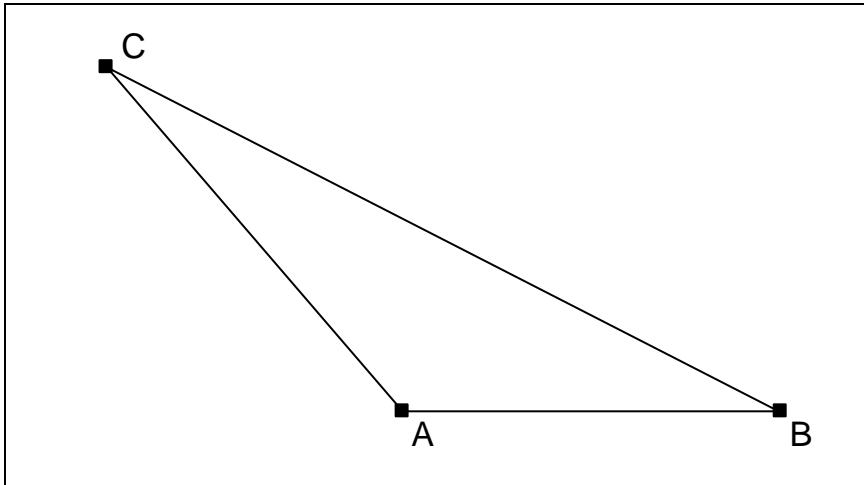
$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Dieser lässt sich natürlich in vielen Varianten schreiben.

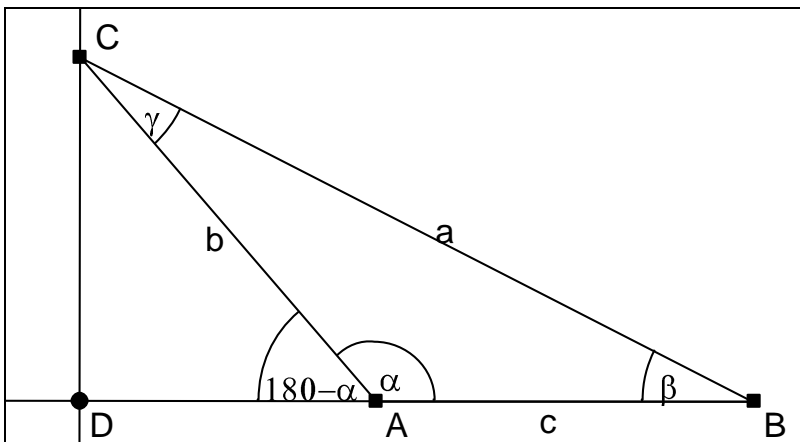
Sonderfall:

Betrachten wir nun ein Dreieck, dessen Höhe nicht auch eine gegenüberliegende Seite fallen würde, also ein stumpfwinkliges Dreieck.

Nehmen wir folgendes Dreieck an:



Zeichnen wir nun die Höhe ein, die durch den Punkt C verläuft. Dazu müssen wir natürlich die Gerade AB betrachten:



Im Dreieck ACD gilt nun:  $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h}{b}$

Und im Dreieck BCD gilt:  $\sin(\beta) = \frac{h}{a}$

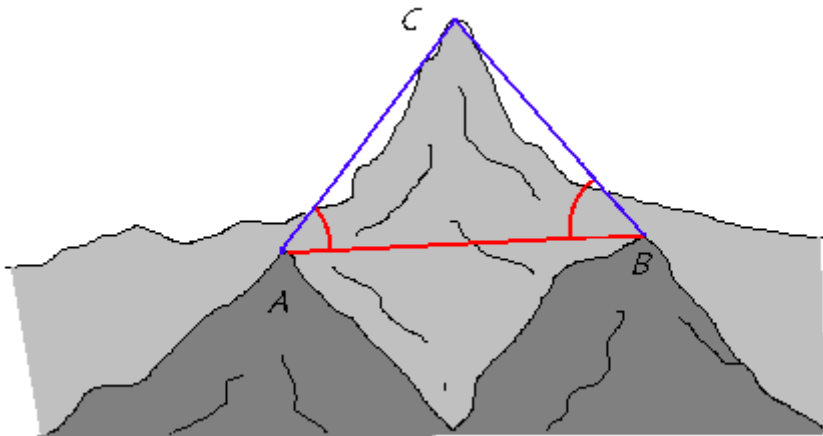
Da man  $\sin(180^\circ - \alpha)$  auch als  $\sin(\alpha)$  schreiben kann, ergibt sich durch isolieren der Variablen ‚h‘ und gleichsetzen der Gleichungen folgendes:  $b \cdot \sin(\alpha) = h = a \cdot \sin(\beta)$   
 also  $b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$

Demnach gilt auch hier die allgemeine Aussage: 
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Beispiel I:

Betrachten wir nun „nützliche“ Anwendungen, um den Sinussatz in der Realität anwenden zu können.

Befindet sich, sagen wir Paul der Bergsteiger auf der Spitze des Berges B und sein Sohn Gerhardt auf der Spitze des Berges A, Ihnen ist die Entfernung zueinander bekannt. Pauls Tochter Anita steht auf der Bergspitze des Berges C.



Den Winkel (Sehwinkel), der bei Paul ist kann er ja bestimmen, sei er  $47^\circ$ . Der Sehwinkel bei Gerhardt ist  $58^\circ$ .

Wir haben nun hier durchaus kein rechtwinkliges Dreieck, denn wie die Rechnung der Winkelsumme im Dreieck ergibt erfolgt für den Winkel bei Anita der Wert von  $75^\circ$ .

Der Sinussatz kann nun das Problem lösen, wenn Paul und Gerhardt wissen wollen, wie weit sie von Anita entfernt sind.

Der Sinussatz heißt ja  $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$  bekannt sind und alle Winkel und die

Strecke  $c = AB$ . Demnach ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{a}{\sin(47^\circ)} = \frac{b}{\sin(58^\circ)} = \frac{3600m}{\sin(75^\circ)}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin(58^\circ) \cdot 3600}{\sin(75^\circ)} \approx 3161m \quad \text{und}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sin(47^\circ) \cdot 3600}{\sin(75^\circ)} \approx 2726m$$

Somit konnten wir mit dem Sinussatz die Strecken bestimmen.

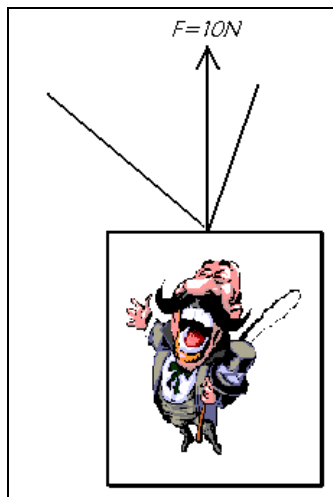
Beispiel II:

Betrachten wir nun ein Beispiel aus der Physik im Gebiet der Mechanik und Kraft:

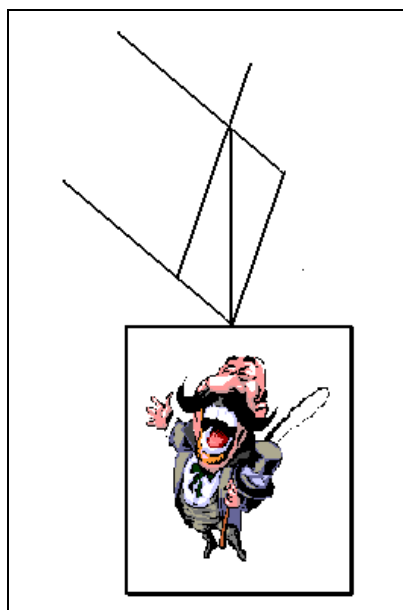
Es hängt ein Bild von  $1000g = 10N$  an zwei Seilen, die an einem Punkt am Bild befestigt sind aber im unterschiedlichen Winkel und somit mit unterschiedlicher Länge befestigt sind und wollen jetzt wissen, welche Kraft an einem Seil zieht:



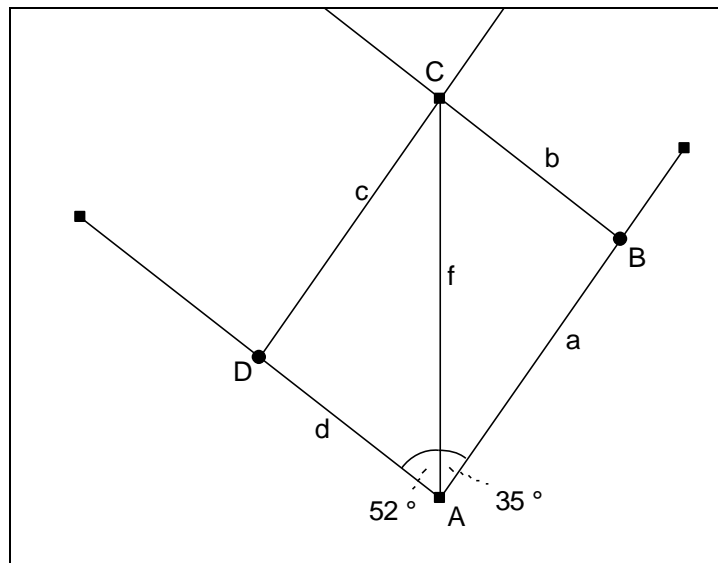
In der Physik benutzt man für einen solchen Fall ein Kräfteparallelogramm. Wir wissen, dass das Bild eine gewisse Kraft ausübt, nämlich 10 N. Zeichnen wir uns diese Größe mal ein:



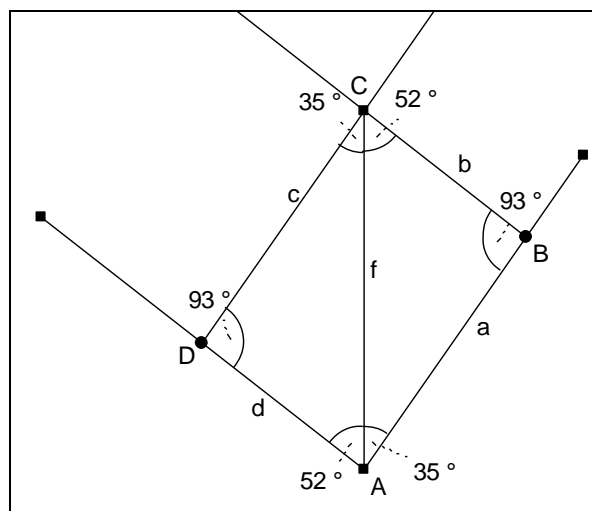
Nun machen wir aus den gegebenen Krafrichtungen (Seile, an denen Bild hängt) ein Parallelogramm, wobei die Kraft in der Mitte eine Diagonale ist:



Wir können jetzt die Kräfte an den zwei Seilen bestimmen. Dazu haben wir schon die Diagonale und wir können die Winkel in den Dreiecken messen bzw. bestimmen. Zeichnen wir uns nun nur das Parallelogramm:



Wir wissen, dass die Dreiecke ABC und ACD kongruent sind, und mit Hilfe der Winkelsumme im Dreieck gilt dann:



Da  $f = 10N$  ist können wir nun mit Hilfe des Sinussatzes die Kräfte an a und d berechnen,

wobei  $|d| = |b|$ . Dann gilt:

$$\frac{a}{\sin(52^\circ)} = \frac{10N}{\sin(93^\circ)} = \frac{d}{\sin(35^\circ)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sin(52^\circ) \cdot 10N}{\sin(93^\circ)} = 7,89N \quad \text{und}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\sin(35^\circ) \cdot 10}{\sin(93^\circ)} = 5,74N$$