

# Leitungen-Laborprotokoll\*

Katharina Breitenecker  
e9726120@student.tuwien.ac.at

Herbert V. Riedel  
e9725348@student.tuwien.ac.at

17. Mai 1999<sup>†</sup>

---

\*Dieses Protokoll wurde mittels L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X unter GNU/Linux verfaßt

<sup>†</sup>Zeitpunkt der experimentellen Durchführung

### Zusammenfassung

Dies stellt das Laborprotokoll von den, in der Laborübung am Mittwoch, den 17. Mai 1999 im Rahmen der LVA durchgeführten *Experimente* dar.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Periodische Strukturen und Leitungen . . . . .	3
1.1.1	Mechanische Strukturen . . . . .	3
1.1.2	Elektrische Strukturen . . . . .	6
1.1.3	Kontinuierliche Leitungen . . . . .	7
1.2	Impulskabel . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Messungen</b>	<b>10</b>
2.1	Kompensation von Tastköpfen . . . . .	10
2.1.1	Tastkopf in Stellung „x1“ . . . . .	10
2.1.2	Tastkopf in Stellung „x10“ . . . . .	10
2.1.3	Koaxialkabel ( $50\Omega$ ) ohne Abschlußwiderstand . . . . .	10
2.1.4	Koaxialkabel ( $50\Omega$ ) mit Abschlußwiderstand . . . . .	10
2.2	Reflexion an Leitungen . . . . .	10
2.3	Kenngrößen von Koaxialkabeln . . . . .	11
2.3.1	Wellenwiderstand . . . . .	11
2.3.2	Ausbreitungsgeschwindigkeit . . . . .	11
2.3.3	Kapazität . . . . .	11
2.3.4	Induktivität . . . . .	11
2.3.5	Dielektrizitätskonstante des Isolators . . . . .	12

# 1 Theorie

## 1.1 Periodische Strukturen und Leitungen

Anordnungen vieler gekoppelter Systeme, die eine gekoppelte Struktur ergeben, können verwendet werden, um *Impulse mit zeitlicher Verzögerung zu übertragen* oder auch als *Filter*, die einzelne Frequenzen durchlassen und andere blockieren — allgemein werden solche Systeme als *Leitungen* bezeichnet.

### 1.1.1 Mechanische Strukturen

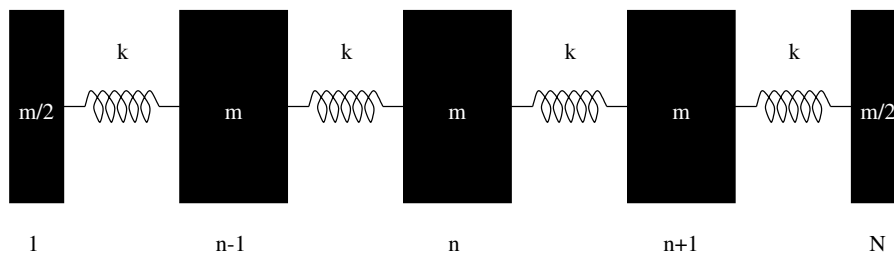


Abbildung 1: Mechanische Leitung

Ein Beispiel für eine mechanische *Leitung* ist in Abbildung 1 dargestellt. Da diese Struktur als aus aneinandergereihten Teilsystemen (zusammengesetzt aus einer Feder und 2 Halbmassen) bestehend angesehen wird, ergibt sich an den Enden jeweils nur eine Halbmasse. Die Massen gehorchen dabei der Newtonschen Differentialgleichung

$$\sum F = m\ddot{x} \quad (1.1)$$

Die linke Seite von (1.1) besteht ausschließlich aus den Federkräften der angreifenden Federn, daher ergibt sich

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n) \\ &= k(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Wobei für die Massen am Ende des Systems

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_N = k(x_N - x_{N-1}) \quad (1.4)$$

gilt. Unter der Annahme, daß  $x_n$  eine Schwingung darstellt, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit unter Beibehaltung ihrer Form fortpflanzt, kann

man mathematisch folgenden Ansatz verwenden:

$$x_{n-1}(t) = x_n(t + T) \quad (1.5)$$

$$x_{n+1}(t) = x_n(t - T) \quad (1.6)$$

Um diesen Ansatz zu vereinfachen, wird dieser einer Taylorentwicklung unterzogen:

$$x_n(t + T) = x_n(t) + \dot{x}_n(t)T + \frac{1}{2}\ddot{x}_n(t)T^2 + \dots \quad (1.7)$$

$$x_n(t - T) = x_n(t) - \dot{x}_n(t)T + \frac{1}{2}\ddot{x}_n(t)T^2 + \dots \quad (1.8)$$

Durch Vernachlässigung ab dem viertem Term<sup>1</sup> und einsetzen von (1.7) und (1.8) in (1.2) gelangt man zu

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= -k(x_n(t + T) - 2x_n(t) + x_n(t - T)) \\ &= -k(x_n(t) + \dot{x}_n(t)T + \frac{1}{2}\ddot{x}_n(t)T^2 - 2x_n(t) + x_n(t) - \dot{x}_n(t)T + \frac{1}{2}\ddot{x}_n(t)T^2) \\ &= -k\ddot{x}_n(t)T^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

woraus sich die folgende Formel

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.10)$$

herleiten läßt.

Um das Verhalten einer *Dämpfung* am Ende der Struktur zu beschreiben, wird die lineare Differentialgleichung (1.4) für das Ende der Struktur um eine *Dämpfungskraft*  $-b\dot{x}_N$  ergänzt:

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_N = -k(x_N - x_{N-1}) - b\dot{x}_N \quad (1.11)$$

Die einlaufende Welle allein wird durch die Gleichung

$$x_N(t + T) = Ax_{N-1}(t) \quad (1.12)$$

beschrieben, wobei  $A$  ein noch zu bestimmender Parameter ist, der die Amplitude des Oszillators am Ende der Struktur angibt. Die reflektierte Welle läßt sich folgendermaßen ansetzen ( $B$  ist wie  $A$  ein Parameter):

$$x_{N-1}(t) = \frac{B}{A}x_N(t - T) \quad (1.13)$$

---

<sup>1</sup>unter der Annahme, daß die Zeit, welche die Schwingungserregung für das Passieren eines vorgegebenen Punktes benötigt, groß im Vergleich zur Verzögerung  $T$  ist

Die Form der resultierenden Überlagerung von einlaufender und reflektierter Welle für  $x_{N-1}(t)$  lautet dann

$$x_{N-1}(t) = \frac{1}{A}x_N(t+T) + \frac{B}{A}x_N(t-T) \quad (1.14)$$

Wieder wird eine Taylorentwicklung angewendet, so daß

$$\begin{aligned} Ax_{N-1}(t) &= x_N(t+T) + Bx_N(t-T) \\ &= (1+B)x_N(t) + (1-B)\dot{x}_N(t)T + \frac{1}{2}(1+B)\ddot{x}_N(t)T^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Einsetzen in (1.11) ergibt

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_N = -kx_N + k\frac{1+B}{A}x_N + k\frac{1-B}{A}\dot{x}_NT + k\frac{1+B}{2A}\ddot{x}_NT^2 - b\dot{x}_N \quad (1.16)$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m &= k\frac{1+B}{2A}T^2 \\ 0 &= k\frac{1-B}{A}T - b \\ 0 &= k\left(\frac{1+B}{A} - 1\right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Daraus geht unter anderem  $A = B + 1$  hervor, woraus sich dann (1.10) wieder erhalten ließe. Schließlich ergibt sich dann noch

$$B = \frac{1 - \frac{b}{kT}}{1 + \frac{b}{kT}} \quad (1.18)$$

Substituiert man dann zuletzt noch mittels (1.10) gelangt man zu

$$B = \frac{1 - \frac{b}{\sqrt{mk}}}{1 + \frac{b}{\sqrt{mk}}} \quad (1.19)$$

Aus dieser Formel lassen sich 3 besondere Fälle herauslesen:

$$\begin{aligned} b = 0 &\implies B = 1 \quad \wedge \quad A = 2 \quad (\text{offenes Ende}) \\ b = \sqrt{mk} &\implies B = 0 \quad \wedge \quad A = 1 \quad (\text{angepasst abgeschlossenes Ende}) \\ b = \infty &\implies B = -1 \quad \wedge \quad A = 0 \quad (\text{festes Ende}) \end{aligned}$$

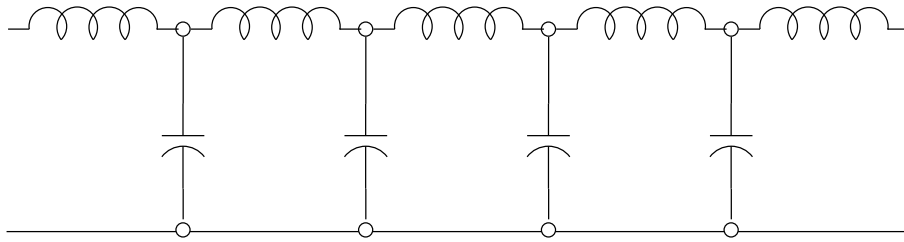


Abbildung 2: Elektrische Leitung

### 1.1.2 Elektrische Strukturen

In Abbildung 2 ist eine mögliche elektrische Struktur dargestellt, die im wesentlichen aus gekoppelten Schwingkreisen zusammengesetzt ist. Als Folge der Kirchhoffschen Regeln ergibt sich

$$\frac{Q_{n-1}}{C} - \frac{Q_n}{C} = L\dot{I}_n \quad (1.20)$$

$$\frac{Q_n}{C} - \frac{Q_{n+1}}{C} = L\dot{I}_{n+1} \quad (1.21)$$

und für den Verzweigungspunkt oberhalb  $Q_n$

$$\dot{Q}_n = I_n - I_{n+1} \quad (1.22)$$

Verknüpfen der Gleichungen (1.21) und (1.22) ergibt

$$L\ddot{Q}_n = \frac{Q_{n-1} - 2Q_n + Q_{n+1}}{C} \quad (1.23)$$

Da sich die Gleichungen (1.23) und (1.2) bis auf konstante Faktoren gleichen, folgen daraus als Resultat äquivalente Eigenschaften. Für die Verzögerung  $T$  gilt dann

$$\boxed{T = \sqrt{LC}} \quad (1.24)$$

Für das gedämpfte Ende der elektrischen Struktur gilt

$$\frac{1}{2}L\ddot{Q}_N = -\frac{Q_N - Q_{N-1}}{C} - Z\dot{Q}_N \quad (1.25)$$

Der daraus resultierende Rechenweg ist dem für die mechanischen Strukturen gleichwertig und es folgt für den Reflexionskoeffizienten  $B$

$$B = \frac{1 - \frac{Z}{\sqrt{\frac{L}{C}}}}{1 + \frac{Z}{\sqrt{\frac{L}{C}}}} \quad (1.26)$$

und daraus folgt schließlich als Bedingung für die vollständige Absorption der Schwingungen, also dem *Wellenwiderstand*:

$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (1.27)$$

### 1.1.3 Kontinuierliche Leitungen

Der Schritt von den elektrischen Strukturen zu den üblichen elektrischen Leitungen gestaltet sich recht einfach, wobei nun die Systemparameter (Induktivität, Kapazität, etc.) pro Längeneinheit definiert werden:

$$\begin{aligned} R' \left[ \frac{\Omega}{\text{m}} \right] & \quad \text{Widerstandsbelag} \\ L' \left[ \frac{\text{H}}{\text{m}} \right] & \quad \text{Induktivitätsbelag} \\ G' \left[ \frac{\text{S}}{\text{m}} \right] & \quad \text{Ableitungsbelag} \\ C' \left[ \frac{\text{F}}{\text{m}} \right] & \quad \text{Kapazitätsbelag} \end{aligned}$$

Für den Wellenwiderstand  $Z_0$  gilt allgemein

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}} \quad (1.28)$$

Wenn man die Leitungsverluste vernachlässigt ( $G' = 0$  und  $R' = 0$ ) ergibt sich für den Wellenwiderstand

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}} \quad (1.29)$$

und für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$ , die durch den Kehrwert der Verzögerung gegeben ist,

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}} \quad (1.30)$$

## 1.2 Impulskabel

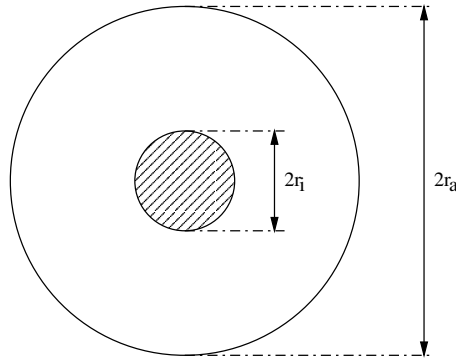


Abbildung 3: Schematischer Querschnitt eines Koaxialkabels

Zur Impulsübertragung werden vorwiegend Koaxialkabel aufgrund ihrer günstigen Übertragungseigenschaften verwendet. Koaxialkabel bestehen aus einem (oder mehreren) Innenleiter(n), einem als konzentrisches Rohr bzw. Schlauch ausgeführtem Außenleiter und aus einem dazwischenliegenden Dielektrikum (siehe Abbildung 3). Zusammengefaßt bieten Koaxialkabel folgende Vorzüge:

- Geschirmt durch Außenleiter.
- Geringe Abstrahlung bzw. Abstrahlverluste.
- Kompakte Bauweise.

Der Induktivitätsbelag ist

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (1.31)$$

und der Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \quad (1.32)$$

wenn das Volumen zwischen Innen- und Außenleiter von einem unmagnetischen Dielektrikum ( $\mu_r = 1$ ) mit der relativen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  ausgefüllt ist. Unter der Vernachlässigung von Übertragungsverluste ergibt sich für den Wellenwiderstand

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (1.33)$$

und für die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} \quad (1.34)$$

wobei dies unter Berücksichtigung von  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  ( $c_0$  ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit) auch als

$$\boxed{v = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}} \quad (1.35)$$

geschrieben werden kann.

## 2 Messungen

### 2.1 Kompensation von Tastköpfen

Die Funktionsweise und die Eigenschaften vom vorliegenden Tastkopf sollte anhand von Messungen erfaßt werden.

#### 2.1.1 Tastkopf in Stellung „x1“

In dieser Stellung kommt vorwiegend die Länge vom koaxialen Verbindungskabel zum tragen.

#### 2.1.2 Tastkopf in Stellung „x10“

In dieser Stellung ist der im Tastkopf integrierte, 10fach abschwächende *frequenzkompensierende Attenuator* aktiv. Dieser muß an dem Oszilloskop mittels der Stellschraube für die einstellbare Kapazität angepaßt werden. Wird diese zu hoch eingestellt, ergibt sich eine Überkompensation, im Fall einer zu niedrigen Einstellung folgt eine Unterkompensation (siehe Abbildung 4). Der Vorteil dieser Konfiguration besteht darin, daß man höhere Frequenzen verzerrungsfrei darstellen kann.

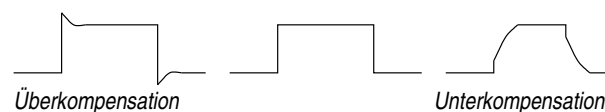


Abbildung 4: Verzerrung des Rechtecksignals bei Fehlanpassung

#### 2.1.3 Koaxialkabel (50Ω) ohne Abschlußwiderstand

Das Verhalten entspricht in etwa dem eines Tastkopfes in x1 Stellung. Wobei zu beachten ist, daß das Oszilloskop einen hohen Eingangswiderstand besitzt und es dadurch zu Reflexionen kommt. Beim Funktionsgenerator, der an die Koaxialleitung angepaßt ist, entstehen keine Reflexionen.

#### 2.1.4 Koaxialkabel (50Ω) mit Abschlußwiderstand

Dadurch, daß nun auch oszilloskopseitig an den Wellenwiderstand angepaßt wurde, treten keine wesentlichen Reflexionen auf.

### 2.2 Reflexion an Leitungen

Die Versuche ergaben die in der Anleitung ausführlich beschriebenen Ergebnisse, daher wird auf eine erschöpfende Darstellung verzichtet.

### 2.3 Kenngrößen von Koaxialkabeln

Von einem 30 m langem Koaxialkabel waren die Kenngrößen mittels der zur Verfügung stehenden Meßgeräte zu bestimmen.

#### 2.3.1 Wellenwiderstand

Der Wellenwiderstand läßt sich bestimmen, indem man den Abschlußwiderstand ermittelt, für den keine Reflexionen mehr auftreten, d. h. die Schwingung vollständig absorbiert wird.

Für das gegebene Koaxialkabel ergab sich folgender Wellenwiderstand:

$$Z_0 \approx 50\Omega$$

#### 2.3.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wurde bestimmt, indem ein vom Funktionsgenerator stammender Impuls gleichzeitig über das 30 m lange Koaxialkabel und ein wesentlich kürzeres geleitet, auf den beiden Eingängen am Oszilloskopen dargestellt und die Verzögerung abgelesen wurde.

Es ergab sich eine Verzögerung von ca. 150 ns auf die 30 m<sup>2</sup>. Daraus ergibt sich als Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$v \approx 200 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

#### 2.3.3 Kapazität

Aus (1.31) und (1.32) läßt sich für gegebene Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenwiderstand die Kapazität bestimmen durch

$$L' = \frac{Z_0}{v} \quad (2.1)$$

Daher

$$L' \approx 0,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

#### 2.3.4 Induktivität

Aus (1.31) und (1.32) läßt sich für gegebene Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenwiderstand die Induktivität bestimmen durch

$$C' = \frac{1}{Z_0 v} \quad (2.2)$$

Daher

$$C' \approx 0,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

---

<sup>2</sup>wobei die Kabellänge vom kürzeren Verbindungskabel vernachlässigt wurde

**2.3.5 Dielektrizitätskonstante des Isolators**

Umformen von (1.35) nach  $\epsilon_r$  führt zu

$$\epsilon_r = \left(\frac{c_0}{v}\right)^2 \quad (2.3)$$

und einsetzen vom zuvor ermittelten  $v$  ergibt

$$\boxed{\epsilon_r \approx 2.25}$$

**Literatur**

- [1] Albrecht Rost, *Grundlagen der Elektronik*, Springer Verlag Wien - New York, 1983
- [2] Franz Seifert, *Elektronik für Informatiker (2. überarbeitete Auflage)*, Springer Verlag Wien - New York, 1991
- [3] Alan M. Portis, Hugh D. Young, *Berkeley-Physik-Kurs Physik und Experiment Bd. 6. (2. Auflage)*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsges., 1980